

Lehrstuhl für Regelungstechnik
der Universität Erlangen-Nürnberg

Professor Dr. phil. nat. H. Schlitt

Seminar über spezielle Probleme der Regelungstechnik
Sommersemester 1992

VERSCHIEDENE KONTINUIERLICHE CHAOTISCHE SYSTEME

Betreuer: Dipl.-Ing. U. Zahner
bearbeitet von: Bernhard-Christian Frenzel
Erlangen, den 30. Juni 1992

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Einleitung	3
2	Grundlegendes zu kontinuierlichen, chaotischen Systemen	4
3	Das Rößlerband	5
3.1	Einleitung	5
3.2	Fixpunktstabilität mit Hilfe der Taylorlinearisierung	7
3.3	Die Carlemanlinearisierung am Rößlerband	9
3.4	Das chaotische Verhalten des Rößlerbandes	12
3.5	Linearisierung bei chaotischem Verhalten	14
4	Der Duffing-Oszillator	17
4.1	Einleitung	17
4.2	Die Carlemanlinearisierung am Duffing-Oszillator	19
5	Das Lorenz-System	21
5.1	Einleitung	21
5.2	Fixpunktstabilität am Lorenz-Attraktor	22
6	Zusammenfassung	24

1 Allgemeine Einleitung

In vielen Bereichen der heutigen Wissenschaft und Technik, aber auch in Bereichen unseres täglichen Lebens sind chaotische Vorgänge zu beobachten. Ein Versuch, diese Phänomene zu beschreiben, besteht zunächst darin, eine Modellbildung des Systems durchzuführen, an dem chaotisches Verhalten auftrat. Daraus ergeben sich prinzipiell nichtlineare Differentialgleichungssysteme und somit eine mathematische Darstellung des i.a. physikalischen Systems.

Um nun die weit entwickelten Methoden der linearen Systemtheorie auf das mathematische Modell anwenden zu können, muß das jeweilige System durch ein lineares möglichst gut approximiert, d.h. linearisiert werden. Eine Möglichkeit hierzu bietet das in diesem Vortrag vorgestellte Carlemansche Linearisierungsverfahren, das eine genauere Approximation als die sonst übliche Taylorreihenentwicklung darstellt. Am Entwicklungspunkt können dann Stabilitätsüberlegungen durchgeführt und mit den Mitteln der linearen Systemtheorie gearbeitet werden. Die Aussagen, die hieraus gewonnen werden können, sind jedoch sehr begrenzt, da die chaotischen Eigenschaften erst durch die Nichtlinearität auftreten.

In diesem Vortrag wird zunächst das Rösslerband als kontinuierliches chaotisches System und sein Fixpunkt- bzw. chaotisches Verhalten bei geeigneter Parameterwahl vorgestellt. An ihm werden dann Linearisierungsmethoden dargestellt und Stabilitätsüberlegungen durchgeführt. Im weiteren wird das Carlemanverfahren auf ein weiteres kontinuierliches, chaotisches System angewendet. Zum Abschluß wird am Beispiel des Lorenzsystems anhand der Variation eines Kontrollparameters der Übergang vom Fixpunktverhalten zu chaotischem Verhalten dargestellt.

2 Grundlegendes zu kontinuierlichen, chaotischen Systemen

Betrachtet man kontinuierliche, chaotische Systeme, so unterscheidet man zwei Arten: Zum einen diejenigen, die chaotisches Verhalten bei stochastischer Anregung aufweisen. Auf diesen Fall soll hier nicht näher eingegangen werden. Die andere Art von Systemen sind diejenigen, die chaotisches Verhalten bei deterministischer Erregung aufweisen, es sich hierbei also auch um ein deterministisches Chaos handelt.

Diese Systeme führen nach geeigneter Modellbildung auf heteronome Differentialgleichungssysteme 1.Ordnung bzgl. der Zeit t :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{u}(t), & t \geq 0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t), t)\end{aligned}$$

und dem Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_a$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

Ist in der obigen Gleichung die rechte Seite nur noch über $\mathbf{x}(t)$ von der Zeit t abhängig, so spricht man von einem autonomen Gleichungssystem mit n Zeilen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) \quad (2)$$

Hierbei stellt \mathbf{x} einen n -dimensionalen Zustandsvektor und \mathbf{u} den Vektor der Eingangsgrößen dar.

Die Darstellung der numerischen Lösung eines solchen Systems erfolgt dann im n -dimensionalen Zustandsraum, aufgespannt durch die zu den Komponenten x_i des Zustandsvektors \mathbf{x} gehörenden Basisvektoren. Nach Abklingen aller Einschwingvorgänge halten sich dann die Systemzustände in einem Gebiet des Zustandsraumes auf, dem *chaotischen Attraktor*, auch *seltsamer Attraktor* genannt. Ein chaotisches System wird i.a. dann dadurch charakterisiert, daß ein seltsamer Attraktor eine fraktale (nicht ganzzahlige) Dimension hat, die kleiner als die Systemordnung n des zugehörigen, autonomen Systems ist und größer als zwei sein muß. Ein chaotischer Attraktor muß jedoch nicht zwingend eine fraktale Dimension haben. So ist beispielsweise die "Katzenabbildung" von L. Arnold chaotisch, aber nicht fraktal. Die hier vorgestellten Attraktoren haben jedoch alle eine nicht ganzzahlige Dimension.

Im Folgenden wird die Abhängigkeit von Zustandsvektoren und deren Komponenten von der Zeit t wegen der Übersichtlichkeit nicht mehr explizit angegeben.

3 Das Rößlerband

3.1 Einleitung

Das Rößlerband zählt zu den einfachsten Systemen mit chaotischem Verhalten mit nur einem nichtlinearen Term und wurde 1976 von Rößler angegeben:

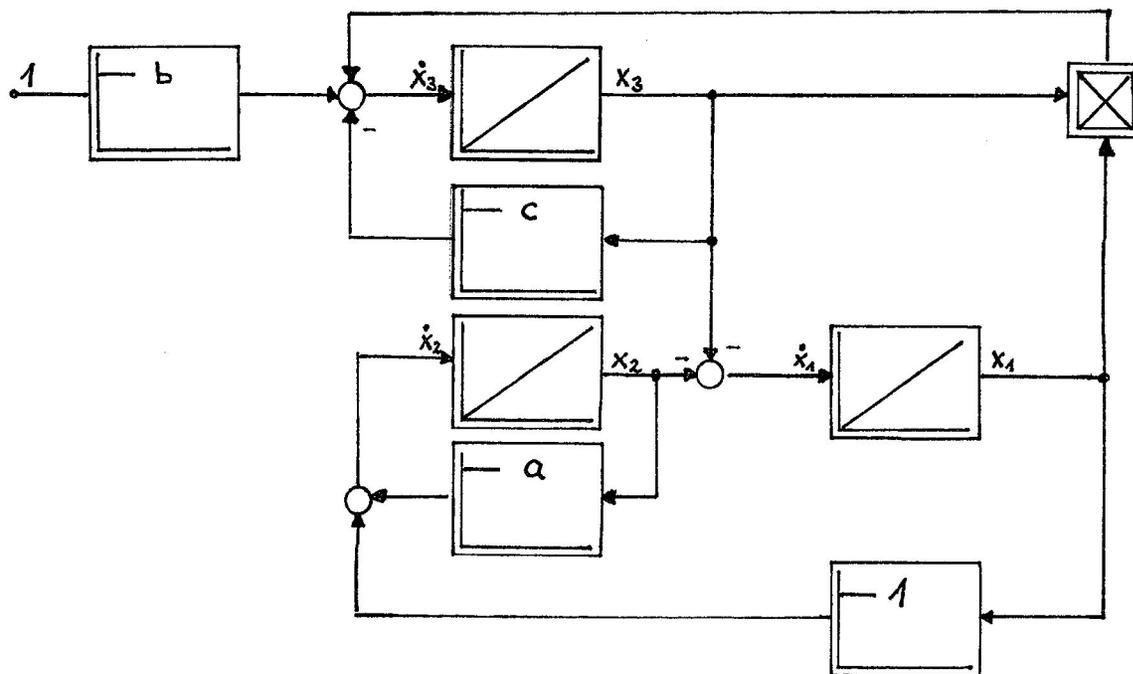
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1x_3 + b \end{aligned} \tag{3}$$

wobei:

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_a$$

D.h. es ergibt sich folgendes Strukturbild:



Es kann nun durch Variation des Parameters a bei konstantem b und c das Verhalten des Systems von stationärem bis hin zu chaotischem Verhalten verändert werden. Zunächst soll das System im Einzugsbereich des Fixpunktes \mathbf{x}^0 untersucht werden. *Fixpunkte* eines nichtlinearen Systems zeichnen sich i.a. dadurch aus, daß sie zeitlich konstante Lösungen darstellen, d.h. $\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$. Dabei ist jedoch noch nichts über die Stabilität des Fixpunktes ausgesagt. Kleine Störungen können sowohl abgebaut (asymptotische Stabilität) als auch eine Entfernung der Systemzustände vom Fixpunkt hervorrufen (Instabilität). Zur weiteren Untersuchung der Stabilität des Fixpunktes ist folgender Satz von zentraler Bedeutung:

Satz: Es seien s_1, \dots, s_n die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} des linearisierten Gleichungssystems an der Stelle des Fixpunktes \mathbf{x}^0 .

1. Gilt

$$\operatorname{Re}\{s_k\} < 0 \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

so ist der Fixpunkt \mathbf{x}^0 der nichtlinearen Gleichung asymptotisch stabil.

2. Gilt

$$\operatorname{Re}\{s_i\} > 0 \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, n\},$$

so ist der Fixpunkt \mathbf{x}^0 der nichtlinearen Gleichung instabil.

Aus diesem Grunde wird zunächst die Taylorlinearisierung am Rößlerband vorgestellt. Sind ein oder mehrere Realteile gleich Null, so erfordert dies die Einbeziehung der nächsthöheren nichtlinearen Terme. Eine andere Möglichkeit bietet die Anwendung der genaueren Carlemanlinearisierung, die im Anschluß vorgeführt wird.

3.2 Fixpunktstabilität mit Hilfe der Taylorlinearisierung

Im Folgenden sind die Systemparameter $b = 2$ und $c = 4$ und a ist veränderbar. Zeigt das nichtlineare System *stationäres* Verhalten, so werden sich die Systemzustände ab einer bestimmten Zeit nicht mehr ändern, d.h. sie werden einen Fixpunkt anlaufen und sämtliche zeitlichen Ableitungen werden verschwinden. Mit dieser Überlegung erhält man die Fixpunkte in Abhängigkeit von den Systemparametern:

$$\begin{aligned} -x_2^0 - x_3^0 &= 0 \\ x_1^0 + ax_2^0 &= 0 \\ -cx_3^0 + x_1^0x_3^0 + b &= 0 \\ \Rightarrow (x_1^0)^2 - cx_1^0 + ab &= 0 \end{aligned}$$

Somit sind die Komponenten der beiden Fixpunkte:

$$\begin{aligned} x_{1,2}^0 &= \frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4ab} \\ x_{2,2}^0 &= -\frac{1}{a}x_{1,2}^0 \\ x_{3,2}^0 &= -x_{2,2}^0 \end{aligned}$$

Das mit der Taylorreihenentwicklung linearisierte Modell im Punkt \mathbf{x}_0 lautet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= x_3x_1 + (x_3 - c)x_3 + b - x_3x_3 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_{30} & 0 & x_{10} - c \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}=\mathbf{J}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Für das linearisierte Rößlerband der Ordnung $N = 1$ erhält man mit der Jacobimatrix \mathbf{J} aus Gleichung 5 folgende charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} C(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{J}) \\ &= s^3 + (c - a - x_{10})s^2 + (1 + x_{30} - ac + ax_{10})s + c - x_{10} - ax_{30} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Eigenwerte des stabilen Rößlerbandes wandern bei Veränderung von a in die rechte, offene s -Halbebene. Gesucht ist nun der Wert für a , bei dem der Übergang von

stabilem zu chaotischem Verhalten auftritt. Hierzu wird im Grenzfall ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar auf der imaginären Achse angenommen:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(s) &= (s + j\beta)(s - j\beta)(s - \alpha) \\ &= s^3 - \alpha s^2 + \beta^2 s - \alpha\beta^2\end{aligned}\tag{7}$$

Durch Koeffizientenvergleich von Gleichung 7 mit 6 ergibt sich:

$$\begin{aligned}-\alpha &= c - a - x_{10} \\ \beta^2 &= 1 + x_{30} - ac + ax_{10} \\ -\alpha\beta^2 &= c - x_{10} - ax_{30}\end{aligned}$$

Setzt man nun die konkreten Zahlenwerte $b = 2$ und $c = 4$ ein und wählt als Fixpunkt $x_1^0 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4ab} = 2 - \sqrt{4 - 2a}$, so ergibt sich:

$$\underbrace{(2 - a + \sqrt{4 - 2a})}_{-\alpha} \underbrace{[(-2 - \sqrt{4 - 2a})a + 1 + \frac{2}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{4 - 2a}]}_{\beta^2} = \underbrace{2\sqrt{4 - 2a}}_{c - x_1^0 - ax_3^0}$$

Eine numerische Lösung der Gleichung liefert $a_0 \approx 0.124967$.

Eine Carlemanlinearisierung für $N > 1$ ergibt unabhängig vom Linearisierungsgrad ebenfalls für a_0 ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar auf der imaginären Achse. Bei weiterer Vergrößerung von a wandern die Nullstellen in die rechte offene s -Halbebene und das System verliert sein Fixpunktverhalten.

3.3 Die Carlemanlinearisierung am Rößlerband

Das Prinzip der Carlemanschen Linearisierung besteht darin, durch Einführung zusätzlicher Zustandsgrößen die "Systeminformation" auf mehrere Variablen zu verteilen. Wird nun linearisiert, so ist der Informationsverlust über das nichtlineare System nicht so groß. Allerdings führt dies zu einer drastischen Erhöhung der Ordnung des linearisierten Systems.

Das Verfahren wird exemplarisch am Rößlerband für den Linearisierungsgrad $N = 2$ durchgeführt.

Das gegebene System ist:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 - x_1x_3 + b\end{aligned}$$

Einführung der Zustandvektoren:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T \\ \mathbf{x}^{(2)} &= (x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_1x_3 \quad x_2^2 \quad x_2x_3 \quad x_3^2)^T \\ &=: (x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9)^T\end{aligned}$$

Zeitliche Ableitung von $(x_4 \quad x_5 \dots x_9)^T$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1\dot{x}_1 \\ \dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2 \\ \dot{x}_1x_3 + x_1\dot{x}_3 \\ 2x_2\dot{x}_2 \\ \dot{x}_2x_3 + x_2\dot{x}_3 \\ 2x_3\dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1x_2 - 2x_1x_3 \\ x_1^2 - x_2^2 + ax_1x_2 - x_2x_3 \\ x_1^2x_3 - x_3^2 - cx_1x_3 - x_2x_3 + bx_1 \\ 2x_1x_2 + 2ax_2^2 \\ x_1x_3 + (a-c)x_2x_3 + x_1x_2x_3 + bx_2 \\ 2x_1x_3^2 + 2bx_3 - 2cx_3^2 \end{pmatrix}$$

Für das erweiterte System ergibt sich somit eine Darstellung zu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}}$$

mit:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9)^T \\ \mathbf{b} &= (0 \quad 0 \quad b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \\ \tilde{\mathbf{c}} &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_1^2x_3 \quad 0 \quad x_1x_2x_3 \quad 2x_1x_3^2)^T\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & -1 & -1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2c \end{pmatrix}$$

Taylorlinearisierung für Terme vom Grad größer 2:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_3 &= 2x_{10}x_{30}x_1 + x_{10}^2 x_3 - 2x_{10}^2 x_{30} \\ x_1 x_2 x_3 &= x_{20}x_{30}x_1 + x_{10}x_{30}x_2 + x_{10}x_{20}x_3 - 2x_{10}x_{20}x_{30} \\ x_1 x_3^2 &= x_{30}^2 x_1 + 2x_{10}x_{30}x_3 - 2x_{10}x_{30}^2 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich das Gesamtsystem zu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9)^T \\ \mathbf{b} &= (0 \quad 0 \quad b \quad 0 \quad 0 \quad -2x_{10}^2 x_{30} \quad 0 \quad -2x_{10}x_{20}x_{30} \quad -2x_{10}x_{30}^2)^T \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & -1 & -1 & 0 \\ b + 2x_{10}x_{30} & 0 & x_{10}^2 & 0 & 0 & -c & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ x_{20}x_{30} & b + x_{10}x_{30} & x_{10}x_{20} & 0 & 0 & 1 & 0 & a-c & 0 \\ 2x_{30}^2 & 0 & 2b + 4x_{10}x_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2c \end{pmatrix}$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß die vorgestellte Taylorlinearisierung der Carleman-linearisierung für den Grad $N = 1$ entspricht. Für steigendes N kann die Approximation beliebig genau werden, in der Praxis setzt die schnell eskalierende Graderhöhung Grenzen. Die Länge des Zustandsvektors ergibt sich für ein System mit dem Grad n und dem Linearisierungsgrad N zu:

$$z = \sum_{r=1}^N \binom{n+r-1}{r}$$

Für das Rößlerband ergibt sich also mit $n = 3$:

Linearisierungsgrad N	Länge z
1	3
2	9
3	19
4	34
\vdots	\vdots

D.h. für ein System 3.Grades mit Linearisierungsgrad 4 ergibt sich also bereits eine Länge von 34.

3.4 Das chaotische Verhalten des Rößlerbandes

Für das Rößlerband:

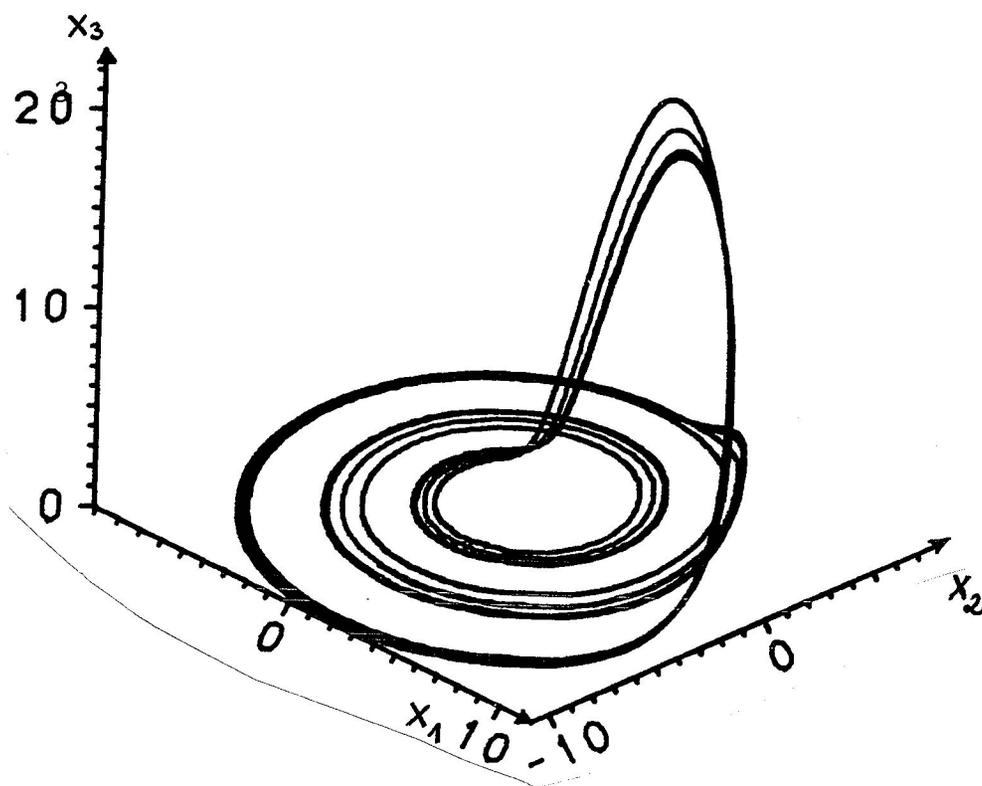
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1x_3 + b\end{aligned}\tag{8}$$

wobei:

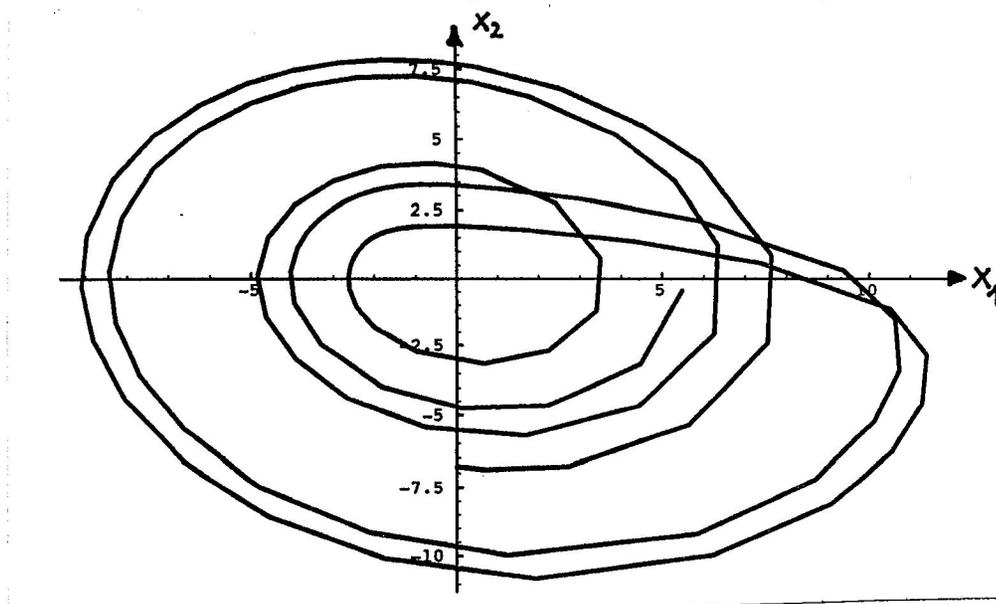
$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_a$$

ergibt sich beispielhaft eine chaotische Lösung für $a = 0.2, b = 0.2$ und $c = 5.7$ mit dem Anfangswert $\mathbf{x}(0) = (0 \quad -6.78 \quad 0.02)^T$ mit Hilfe einer Simulation zu:



Eine Projektion in die x_1x_2 -Ebene ergibt zu:



Die Lösung läßt sich folgendermaßen veranschaulichen:

Solange $x_3 \ll x_1$ und $x_3 \ll x_2$ ist, verhält sich das System näherungsweise wie:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenwerte folgt dann:

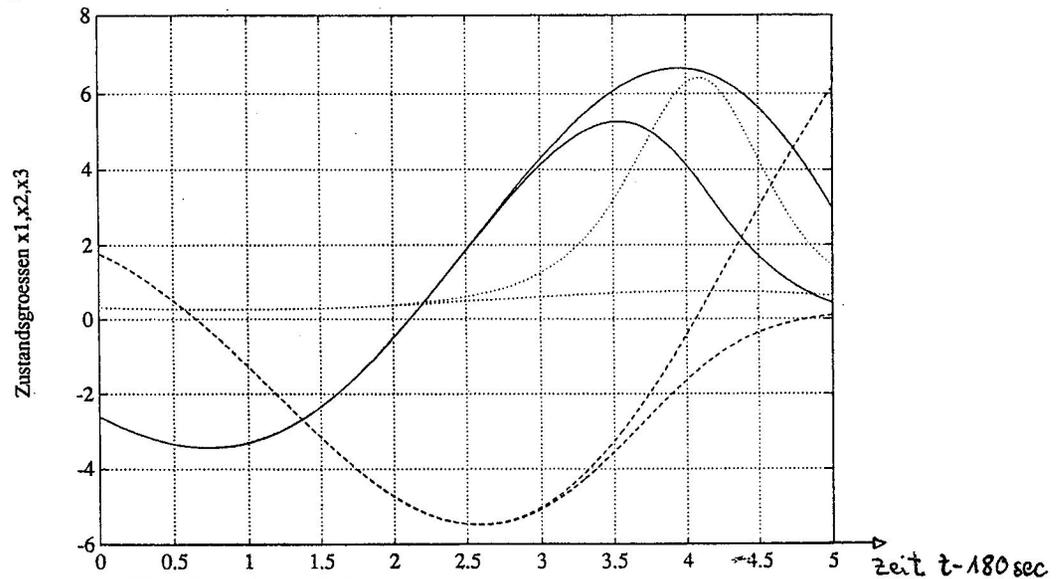
$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{\infty 1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4}{4}}$$

Wie in der Simulation soll nun $a = 0.2$ angenommen werden, d.h. die Realteile der beiden Eigenwerte sind positiv. Dadurch klingen x_1 und x_2 auf, bis durch x_1x_3 auch die Zustandsgröße x_3 derart aufgeklungen ist, daß x_3 nicht mehr vernachlässigt werden kann. Dann wird x_1 durch x_3 in der 1. Gleichung wieder verringert und somit x_2 in der 2. Gleichung und x_3 in der 3. Gleichung. Die Lösungstrajektorie wird also *zurückgefaltet*. Dieses Falten der Trajektorien ist typisch für chaotische Systeme und geht bei der Linearisierung verloren.

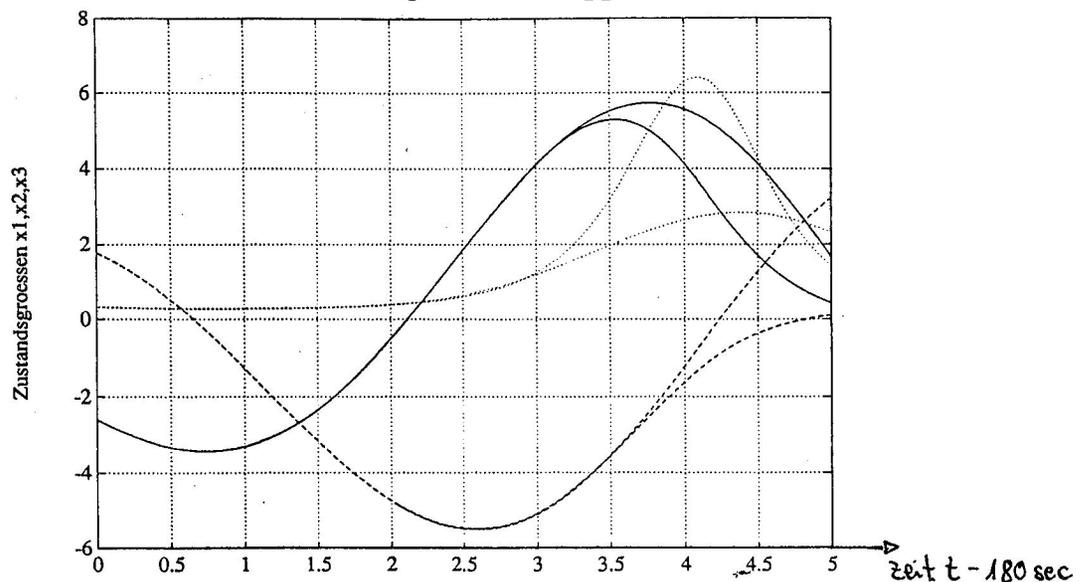
Zur Linearisierung kann zum einen die bekannte Taylorreihenentwicklung oder die genauere Carlemansche Linearisierung herangezogen werden.

3.5 Linearisierung bei chaotischem Verhalten

Für die Parameter $a = 0.411$, $b = 2$, $c = 4$ und dem Startwert $\mathbf{x}_a = (-0.5787 \quad -0.0386 \quad 0.4549)^T$ ergeben sich für die realen und die linearisierten Zustandsgrößen im Zeitraum von 180...185 Sekunden:



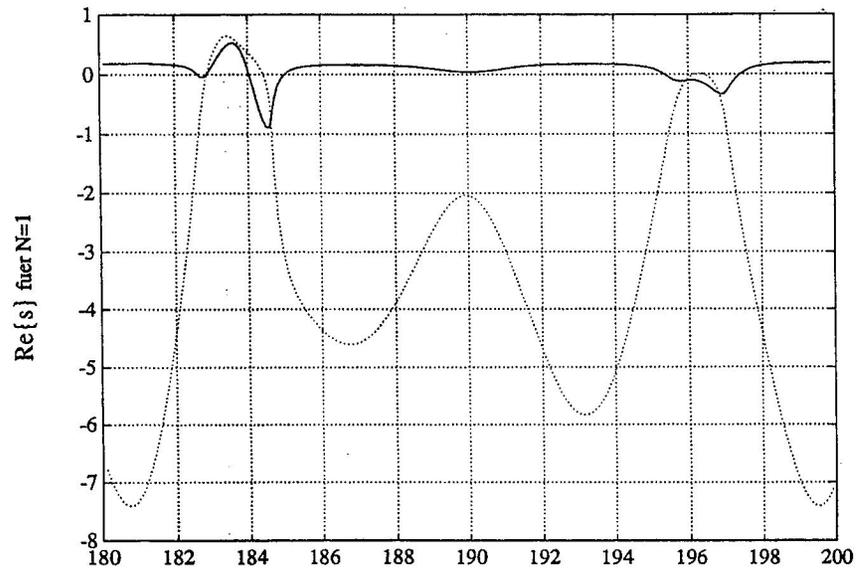
Zu Beginn der Simulation stimmen die Lösungen mit den linearisierten Lösungen recht gut überein. Im Bereich der Faltung tritt dann eine starke Abweichung vom ursprünglichen Verlauf auf. Um diesen Fehler zu verringern, kann man das System mit dem Carlemanschen Linearisierungsverfahren approximieren:



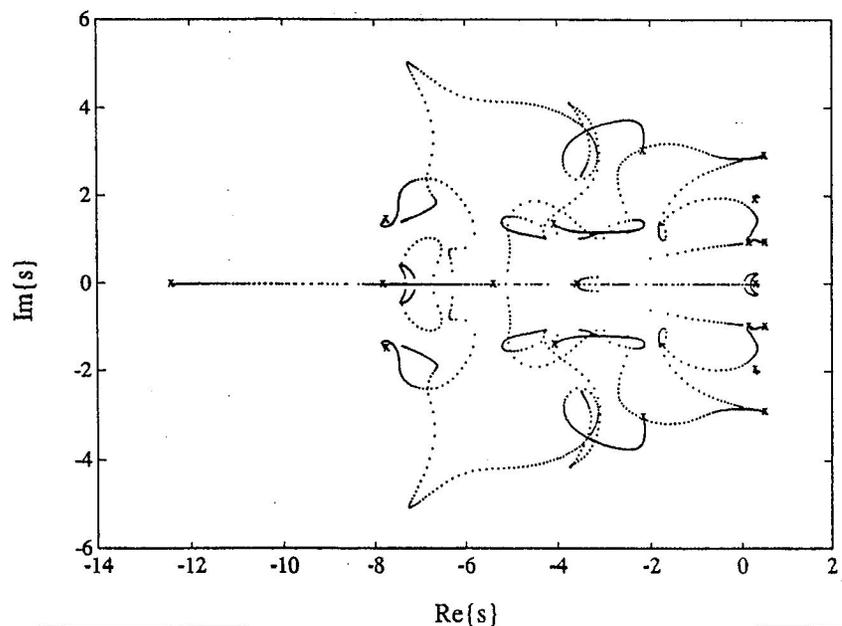
Weiterhin kann auch lokal am Arbeitspunkt eine Aussage über die lokale Stabilität

gemacht werden. Bei chaotischen Systemen kann man hierzu die lokalen Eigenwerte an einem Arbeitspunkt der Lösungstrajektorie betrachten. Läßt man nun den Linearisierungspunkt entlang der Trajektorie wandern, so erhält man den Verlauf der Eigenwerte bzw. deren Realteile bei einem Durchlauf des Grenzzyklus in Abhängigkeit von der Zeit t .

Für eine Carlemanlinearisierung 1. Ordnung des Rößlerbandes ergibt sich ein Verlauf des Realteils der Eigenwerte mit den Parametern nach Abschnitt 3.2 im Zeitintervall $180s \leq t \leq 200s$ zu:



Im Zeitintervall $180s \leq t \leq 185s$ ergibt sich in der s -Ebene für eine Carlemanlinearisierung vom Grad $N = 3$:



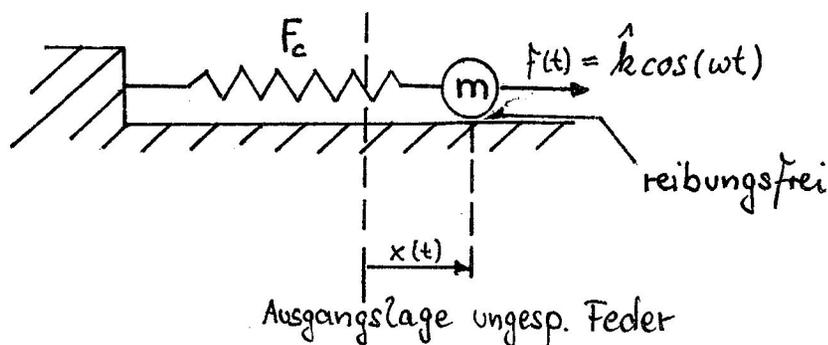
Aus dem komplizierten Verlauf der Eigenwerte, deren Realteile je nachdem positiv oder negativ werden können, kann man erkennen, daß der für lineare Systeme geltende Stabilitätsbegriff für chaotische Systeme bei chaotischem Verhalten nicht handhabbar ist.

Es ist also nicht möglich, aufgrund der Eigenwerte des linearisierten, chaotischen Systems zu einem Stabilitätsbegriff bei chaotischen Systemen zu gelangen.

4 Der Duffing-Oszillator

4.1 Einleitung

Der Duffing-Oszillator ergibt sich beispielsweise aus der Modellbildung des folgenden Systems:



wobei die Feder die nichtlineare Charakteristik $F_c(x) = bx + cx^3$ hat. Aus der Kräfte-summe ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + bx + cx^3 &= \hat{k} \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{x} &= \underbrace{-\frac{b}{m} x}_{\alpha} - \underbrace{\frac{c}{m} x^3}_{\beta} + \underbrace{\frac{\hat{k}}{m} \cos(\omega t)}_{\gamma} \end{aligned}$$

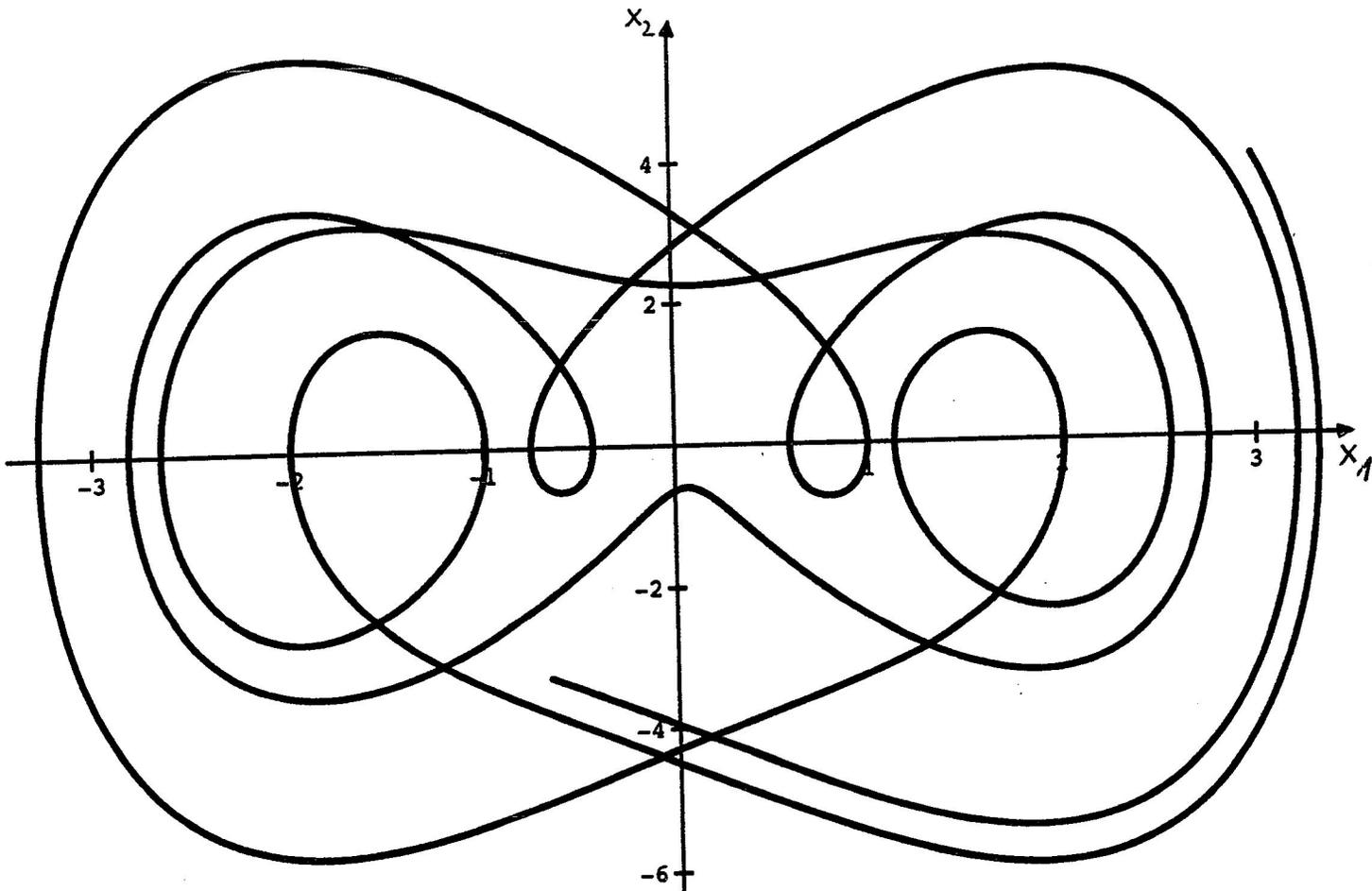
In Zustandsdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + \beta x_1^3 + \gamma \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Durch Einführung der Zustandsvariablen $x_3 := \cos(\omega t)$ und $x_4 := -\omega \sin(\omega t)$ ergibt somit das autonome Gleichungssystem des Duffing-Oszillators zu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + \beta x_1^3 + \gamma x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\omega^2 x_3 \end{aligned}$$

Mit den Parametern $\alpha = -0.05, \beta = -1, \gamma = 7.5$ und $\omega = 1$ ergibt sich mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_a = (3 \ 4 \ 1 \ 0)^T$ folgender chaotischer Verlauf von x_1 und x_2 in der Phasenebene:



4.2 Die Carlemanlinearisierung am Duffing-Oszillator

Die unter Abschnitt 3.3 durchgeführte Carlemanlinearisierung führte direkt auf ein lineares System, da in der Systembeschreibung keine äußere Größe $u(t)$ angreift, d.h. nach Festlegung eines Anfangswertes \mathbf{x}_a das System für alle Zeiten $t \geq 0$ sich selbst überlassen ist. Das Carlemanverfahren ist ursprünglich jedoch ein Bilinearisierungsverfahren, das das nichtlineare System in die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}u + \mathbf{b}u + \dots$$

überführt. Für den Linearisierungsgrad $N = 3$ sei hier der Zusammenhang exemplarisch am Duffing-Oszillator vorgeführt.

Das gegebene heteronome System lautet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + \beta x_1^3 + \gamma \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Einführung der Zustandsvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} &= (x_1 \quad x_2)^T \\ \mathbf{x}^{(2)} &= (x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad x_2^2)^T \\ &=: (x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T \\ \mathbf{x}^{(3)} &= (x_1^3 \quad x_1^2 x_2 \quad x_1 x_2^2 \quad x_2^3)^T \\ &=: (x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9)^T \end{aligned}$$

Zeitliche Ableitung von $(x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9)^T$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 \\ 2x_2 \dot{x}_2 \\ 3x_1^2 \dot{x}_1 \\ 2x_1 \dot{x}_1 x_2 + x_1^2 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 \dot{x}_2 \\ 3x_2^2 \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_4 \\ x_5 + \alpha x_3 + \beta x_1^4 + \gamma x_1 \cos(\omega t) \\ 2\alpha x_4 + 2\beta x_1^3 x_2 + 2x_2 \gamma \cos(\omega t) \\ 3x_7 \\ 2x_8 + \alpha x_6 + \beta x_1^5 + x_3 \gamma \cos(\omega t) \\ x_9 + 2\alpha x_7 + 2\beta x_1^4 x_2 + 2x_4 \gamma \cos(\omega t) \\ 3\alpha x_8 + 3\beta x_2^2 x_1^3 + 3x_5 \gamma \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Taylorentwicklung für Terme vom Grad größer 3:

$$\begin{aligned} x_1^4 &= x_1 x_6 = -x_{10} x_{60} + x_{60} x_1 + x_{10} x_6 \\ x_1^5 &= x_3 x_6 = -x_{30} x_{60} + x_{60} x_3 + x_{30} x_6 \\ x_1^3 x_2 &= x_2 x_6 = -x_{20} x_{60} + x_{60} x_2 + x_{20} x_6 \\ x_1^4 x_2 &= x_4 x_6 = -x_{40} x_{60} + x_{60} x_4 + x_{40} x_6 \\ x_2^2 x_1^3 &= x_3 x_8 = -x_{30} x_{80} + x_{80} x_3 + x_{30} x_8 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich das Gesamtsystem zu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}u + \mathbf{b}_1u + \mathbf{b} \quad (9)$$

mit:

$$\begin{aligned} u &= \cos(\omega t) \\ \mathbf{x} &= (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9)^T \\ \mathbf{b} &= (0 \ 0 \ 0 \ -\beta x_{10}x_{60} \ -2\beta x_{20}x_{60} \ 0 \ -\beta x_{30}x_{60} \ -2\beta x_{40}x_{60} \ -3\beta x_{30}x_{80})^T \\ \mathbf{b}_1 &= (0 \ \gamma \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta x_{60} & 0 & \alpha & 0 & 1 & \beta x_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta x_{60} & 0 & 2\alpha & 0 & 2\beta x_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta x_{60} & 0 & 0 & \alpha + \beta x_{30} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta x_{60} & 0 & 2\beta x_{40} & 2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3\beta x_{80} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3(\alpha + \beta x_{30}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nimmt man nun im Linearisierungspunkt \mathbf{x}_0 zum Zeitpunkt t_0 die Erregung $u(t_0) = \cos(\omega t_0)$ als konstant an, so kann die Gleichung 9 in eine lineare Gleichung umgewandelt werden:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + u(t_0)\mathbf{B})\mathbf{x} + (\mathbf{b}_1u(t_0) + \mathbf{b})$$

5 Das Lorenz-System

5.1 Einleitung

Das als nächstes vorgestellte Lorenz-System ist eines der ersten Systeme, dessen chaotisches Verhalten 1963 untersucht wurde. Es entstand aus einem sehr stark vereinfachten Modell zur Beschreibung der Bewegung der Erdatmosphäre, hervorgerufen durch einen positiven Temperaturgradienten in Erdoberflächenrichtung. Außerdem modelliert das System das Bénard-Rayleigh-Problem. Seine Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{10}$$

mit

$$p, r, b > 0$$

Im Folgenden seien die Parameter $p = 10$, $b = \frac{8}{3}$. Durch Verändern des „Kontrollparameters“ r wird dann das Lorenzsystem von Fixpunktverhalten ins Chaos geführt (beim Bénard-Problem ist r die relative Rayleigh-Zahl, somit proportional zur Temperaturdifferenz und damit extern beeinflussbar).

5.2 Fixpunktstabilität am Lorenz-Attraktor

Zunächst soll das System 10 Fixpunktverhalten aufweisen, d.h. $\dot{\mathbf{x}} \equiv 0$. Somit ergeben sich die stationären Punkte zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^0 &= (0 \quad 0 \quad 0)^T \\ \mathbf{x}_{2,3}^0 &= (\pm\sqrt{b(r-1)} \quad \pm\sqrt{b(r-1)} \quad r-1)^T \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung für die Stabilitätsanalyse eines Fixpunktes $\mathbf{x}^0 = (x^0 \quad y^0 \quad z^0)^T$ ergibt sich zu:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{J}) = \det \begin{pmatrix} -p-s & p & 0 \\ r-z^0 & -1-s & -x^0 \\ y^0 & x^0 & -b-s \end{pmatrix} = 0$$

- Für den Fixpunkt \mathbf{x}_1^0 ergibt sich somit:

$$(s+b)[s^2 + (p+1)s - p(r-1)] = 0$$

Für $r < 1$ ist die quadratische Gleichung ein Hurwitzpolynom, d.h. für $0 < r < 1$ ist der Fixpunkt \mathbf{x}_1^0 stabil. Für $r > 1$ wandert ein Eigenwert in die rechte, offene s -Halbebene und \mathbf{x}_1^0 wird instabil.

- Für den Fixpunkt \mathbf{x}_2^0 ergibt sich:

$$\begin{aligned} s^3 + (1+b+p)s^2 + b(p+r)s + 2bp(r-1) &= 0 \\ \Rightarrow s^3 + (1+b+p)s^2 + bps - 2bp + r(bs + 2bp) &= 0 \\ \Rightarrow 1 + r \frac{b(s+2p)}{s^3 + (1+b+p)s^2 + bps - 2bp} &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man nun für $p = 10, b = \frac{8}{3}$ ein, so erhält man:

$$1 + \frac{8}{3}r \frac{s+20}{s^3 + \frac{41}{3}s^2 + \frac{80}{3}s - \frac{160}{3}} = 0$$

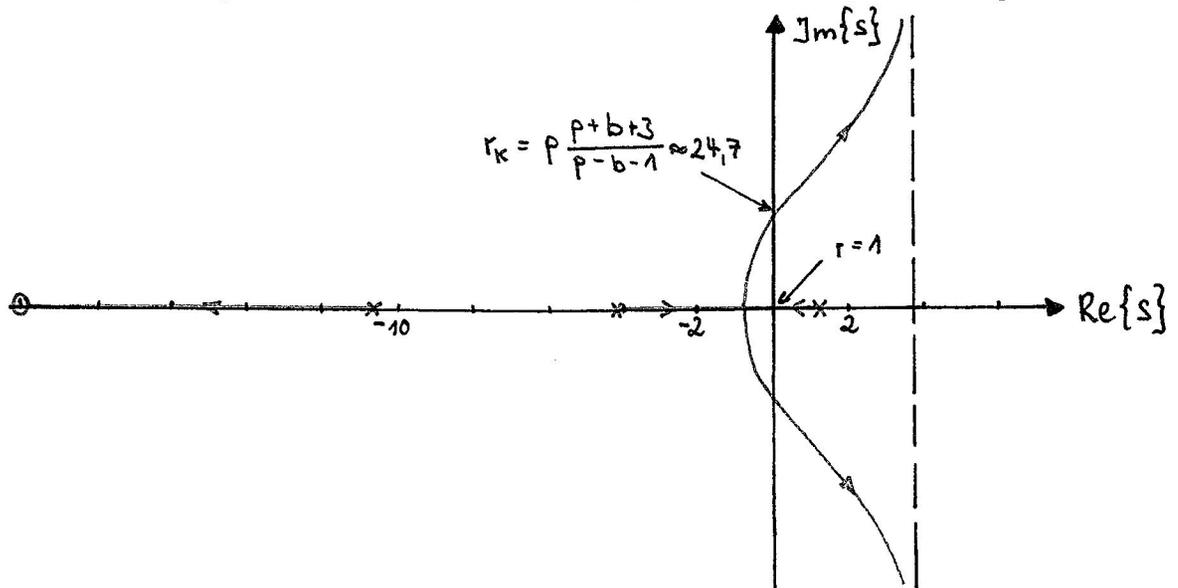
Die Eigenwerte des 2. Fixpunktes können nun mit Hilfe des WOK-Verfahrens untersucht werden, wobei sich numerisch folgende Punkte ergeben:

1. Pole:

$$\begin{aligned} s_{\infty 1} &\approx 1.2 \\ s_{\infty 2} &\approx -4.2 \\ s_{\infty 3} &\approx -10.7 \end{aligned}$$

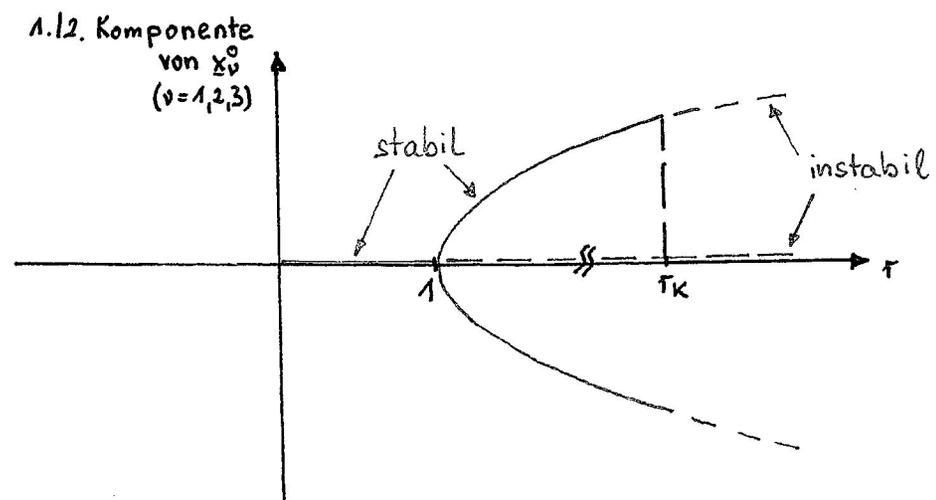
2. Nullstellen: $s_{01} = -20$
3. Wurzelschwerpunkt: $s_w \approx 3.7$
4. Verzweigungspunkt: $s_v \approx -0.8$

Somit folgt für das charakteristische Polynom des 2. Fixpunktes folgende WOK:



Für $r > 1$ befinden sich alle Eigenwerte in der linken offenen s -Halbebene, d.h. der 2. Fixpunkt wird stabil. Bei weiterer Vergrößerung von r verzweigen sich die Eigenwerte und überschreiten bei r_k die imaginäre Achse, d.h. die Realteile der Wurzeln werden positiv. Da nun keiner der Fixpunkte mehr stabil ist, entsteht für $p = 10, b = \frac{8}{3}, r = r_k \approx 24.7$ chaotisches Verhalten.

Man erhält insgesamt somit folgenden Bifurkationsverlauf:



6 Zusammenfassung

Die in diesem Vortrag durchgeführten Untersuchungen an chaotischen Systemen haben sicherlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Was dem Zuhörer jedoch im Gedächtnis bleiben sollte ist der Sachverhalt, daß die Methoden der linearen Systemtheorie bei chaotischen Systemen nur noch begrenzt eingesetzt werden können. Sinnvoll sind sie im Zusammenhang mit der Untersuchung beim Übergang von Fixpunktverhalten zu chaotischem Verhalten. Liegt chaotisches Verhalten vor, so ist dieses mit linearen Näherungen nicht beschreibbar (Eine Möglichkeit besteht zwar in der Systembeschreibung durch eine Carlemanlinearisierung für den Linearisierungsgrad $N \rightarrow \infty$, für endliche Werte von N versagt aber auch die Carlemanlinearisierung). Bei nichtlinearen Systemen kann über einen Linearisierungsansatz eine Aussage über die Stabilität also nur dann getroffen werden, wenn kein Chaosverhalten vorliegt. Für chaotische Systeme sind keine Eigenwerte und somit auch kein daraus ableitbarer Stabilitätsbegriff definiert. Man kann nur anhand der Lyapunovexponenten, die für lineare Systeme den Eigenwerten entsprechen, erkennen, ob es sich um ein chaotisches System handelt oder nicht.

Literatur

- [1] JETSCHKE, G.: *Mathematik der Selbstorganisation*, VEB Verlag, Berlin 1989
- [2] MAYRHOFER, S.: *Chaotische Systeme*, Studienarbeit am Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik, FAU Erlangen 1987
- [3] MOOSBURGER, A.: *Untersuchung von chaotischen Phänomenen in nichtlinearen Differentialgleichungssystemen mit Hilfe der Carlemanschen Linearisierung*, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Regelungstechnik, FAU Erlangen 1991
- [4] PLASCHKO, P., BROD, K.: *Höhere Mathematik für Ingenieure und Physiker*, Springer Verlag, Berlin 1989
- [5] SCHLITT, H.: *Regelungstechnik*, Vogel Verlag, Würzburg 1988
- [6] SCHÜBLER, H.W.: *Netzwerke, Signale und Systeme II*, Springer Verlag 1988
- [7] SCHUSTER, H. G.: *Deterministic chaos - an introduction*, Physik Verlag, Weinheim 1984