5.1

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = 2(\vec{a}+\vec{b}) = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = 2(\vec{a}-\vec{b}) = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 48$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2+0^2+4^2} = \sqrt{2\cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{4^2+4^2+8^2} = \sqrt{96} = \sqrt{6\cdot 16} = 4\sqrt{6} = 4\cdot\sqrt{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|} = \frac{48}{4\sqrt{2}\,4\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{48}{32\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|} = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 30^\circ$$

5.2

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} \qquad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5.3 a)

$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = \underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}} + \vec{a}\times\vec{b} - \vec{b}\times\vec{a} - \underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=\vec{0}}$$

$$= \vec{a}\times\vec{b} - \vec{b}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b} = 2(\vec{a}\times\vec{b}) = 2\vec{a}\times\vec{b}$$

b)

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$ gilt nicht allgemein, sondern nur wenn $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ ist

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ stimmt, wenn $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$ oder $\cos\varphi = 1$

c) $\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}$ stimmt, wenn $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$

Ist $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}\neq\vec{0}$, dann folgt aus $\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}$

$\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$ d.h. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

$\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}$ gilt nicht allgemein

d) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}$

5.4 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b}) = 0$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b}) = 2\,\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{a} - 5\vec{b}\cdot\vec{b}$

$= 2|\vec{a}|^2 - 3\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 5|\vec{b}|^2 = 2\cdot 2^2 - 3\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 5 = 3 - 3\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ $\quad \cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{3} = 60°$

5.5 a) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

Es gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$ oder $\varphi = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \\ |\vec{a}\times\vec{b}| = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

$\Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$ oder $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°$

c) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$

$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \Rightarrow 4\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0 \Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$

5.6

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi)^2 + (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi)^2$$
$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

5.7

$$\vec{u} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \qquad \vec{v} = \vec{b}-\vec{a} \qquad \vec{w} = \vec{c}-\vec{b}$$
$$c_1\vec{u} + c_2\vec{v} + c_3\vec{w} = \vec{0}$$
$$c_1(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) + c_2(\vec{b}-\vec{a}) + c_3(\vec{c}-\vec{b}) = \vec{0}$$
$$(c_1-c_2)\vec{a} + (c_1+c_2-c_3)\vec{b} + (c_1+c_3)\vec{c} = \vec{0}$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear unabhängig $\Rightarrow$
$$\begin{aligned} c_1 - c_2 \phantom{{}-c_3} &= 0 \quad (\mathrm{I}) \\ c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \quad (\mathrm{II}) \\ c_1 \phantom{{}+c_2} + c_3 &= 0 \quad (\mathrm{III}) \end{aligned}$$

$(\mathrm{I}) \Rightarrow c_2 = c_1$ in (II)
$(\mathrm{III}) \Rightarrow c_3 = -c_1$ in (II)

$(\mathrm{II}) \Rightarrow c_1+c_1+c_1 = 3c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0, c_3 = 0$

$c_1\vec{u}+c_2\vec{v}+c_3\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0 \Rightarrow \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ linear unabhängig

5.8

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \cos^2(60°) + \cos^2\beta + \cos^2(135°) = 1$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\beta + \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 1 \qquad \tfrac{1}{4} + \cos^2\beta + \tfrac{2}{4} = 1 \qquad \cos^2\beta = \tfrac{1}{4}$$

$\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$ $\quad\beta$ stumpf $(\beta > 90°) \Rightarrow \cos\beta = -\frac{1}{2} \quad \beta = 120°$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} \quad \text{mit } a = |\vec{a}|$$

$$a_x = a\cos\alpha = 4\cdot\tfrac{1}{2} = 2$$
$$a_y = a\cos\beta = 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -2$$
$$a_z = a\cos\gamma = 4\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

5.9

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = -18 \qquad |\vec{a}|^2 = 3^2+(-6)^2+3^2 = 54$$

$$\vec{b}_{\parallel\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{-18}{54}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_{\perp\vec{a}} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel\vec{a}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.10

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |-8|\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 8\sqrt{9} = 24 \qquad V = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = 12$$

5.11

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-46\\31\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-46\\31\\2\end{pmatrix} = 75 \qquad V=75$$

5.12

$$d = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{36} = 6$$

$$\vec{r}_1-\vec{r}_0 = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix} \qquad \vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0) = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix} = 30$$

$$d = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = \frac{30}{6} = 5$$

5.13

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\-6\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \qquad |\vec{a}_1\times\vec{a}_2| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$$

$$\vec{r}_2-\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad (\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} = -6$$

$$d = \frac{|(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|} = \frac{|-6|}{3} = 2$$

5.14

$$\vec{r}_1-\vec{r}_0 = \begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix} \qquad \vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0) = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix} = 30 \neq 0$$

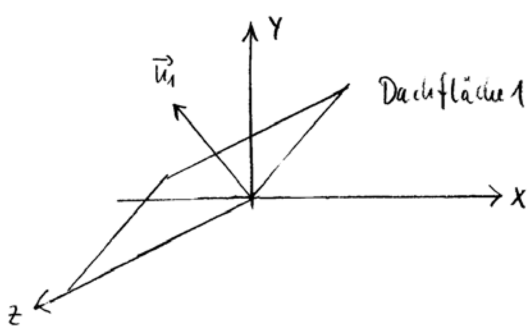
Der Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ liegt nicht in der Ebene

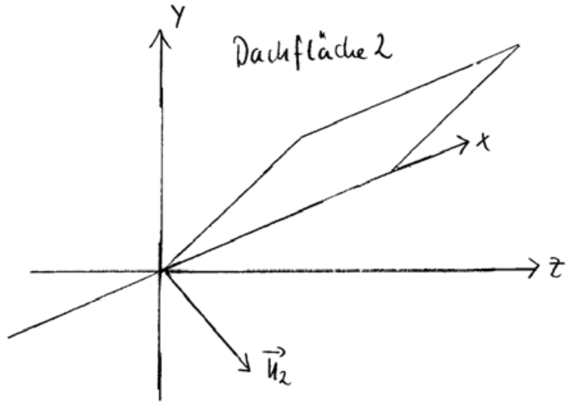
$$\vec{n}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{n}$$

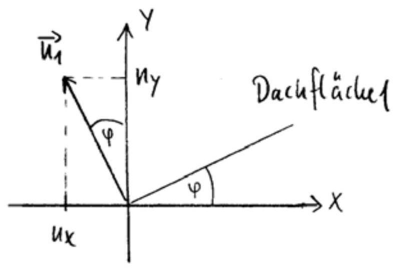
$\Rightarrow$ Gerade parallel zur Ebene

$$|\vec{n}| = \sqrt{36} = 6 \qquad d = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = \frac{30}{6} = 5$$

5.15



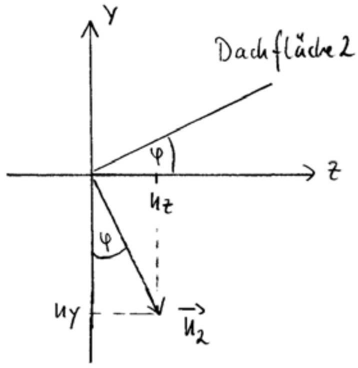




$\cos\varphi = \dfrac{u_y}{u_1}$ $\sin\varphi = \dfrac{-u_x}{u_1}$ mit $u_1 = |\vec{u}_1|$

Fur $u_1 = 1$ gilt $u_y = \cos\varphi$ $u_x = -\sin\varphi$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



$\cos\varphi = \dfrac{-u_y}{u_2}$ $\sin\varphi = \dfrac{u_z}{u_2}$ mit $u_2 = |\vec{u}_2|$

Fur $u_2 = 1$ gilt $u_y = -\cos\varphi$ $u_z = \sin\varphi$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

b) Fur den Winkel α zwischen den Dachflächen gilt

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = -\cos^2\varphi$$

$\cos\alpha = -\cos^2\varphi$ $\qquad \alpha = \arccos(-\cos^2\varphi)$

$\varphi \to 0 \Rightarrow \alpha \to 180^\circ$ $\qquad \varphi \to 90^\circ \Rightarrow \alpha \to 90^\circ$

a) $\varphi = 45^\circ$ $\quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}$ $\quad \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$

5.16 a)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R\sin(\omega t) \\ \omega R\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega R \sin(\omega t) \\ \omega R \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos(\omega t) \\ -\omega^2 R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} -\omega R \sin(\omega t) \\ \omega R \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\omega R \cos(\omega t) \\ B\omega R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} qB\omega R \cos(\omega t) \\ qB\omega R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$q\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} qB\omega R \cos(\omega t) \\ qB\omega R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{qB}{\omega} \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos(\omega t) \\ -\omega^2 R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = k\vec{a} \quad \text{mit } k = -\frac{qB}{\omega}$$

e)

$$k = m \qquad -\frac{qB}{\omega} = m$$